1) $n^5-n = n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Рассмотрим n по модулю 5. Если $n ⋮ 5$, то и $n(n-1)(n+1)(n^2+1) ⋮ 5$. Если $n \equiv 4$, то $(n+1) ⋮ 5$. Если $n \equiv 1$, то $(n-1) ⋮ 5$. Если ~~n^2~~ $n \equiv 2$ или $n \equiv 3$, то $n^2 \equiv 4$, $n^2+1 ⋮ 5$.
Для модуля 5 все варианты подходят.
Рассмотрим n по модулю 3. ~~Это~~ У нас есть произведение 3 последовательных чисел. $n(n-1)(n+1) ⋮ 3 \Rightarrow n(n-1)(n+1)(n^2+1) ⋮ 3$ при любом n. Мы имеем, что $n(n-1)(n+1)(n^2+1) ⋮ 15$ при любом n. Чтобы это выражение делилось на 120, надо, чтобы оно делилось на 8. Рассмотрим остатки n при делении на 8.
Если n нечётное, то $(n-1)(n+1) = n^2-1 ⋮ 8$.
Если $n ⋮ 8$, то $n(n-1)(n+1)(n^2+1) ⋮ 8$.
Если $n ⋮ 2$, но ~~n~~ $n \not⋮ 8$, то $n+1$, $n-1$, n^2+1 — нечётные и $n \not⋮ 8 \Rightarrow n(n-1)(n+1)(n^2+1) \not⋮ 8 \Rightarrow n(n-1)(n+1)(n^2+1) \not⋮ 120$.
Выражение $n^5-n ⋮ 120$, если n — нечётное, или $n ⋮ 8$. +

2) Число 1989 — сумма цифр равна $27 ⋮ 27$, но
$\frac{1989}{27} = 73\frac{18}{27} = 73\frac{2}{3}$ — противоречие. Петя не прав +

3) Предположим противное. Каждый из студентов составил не более 4 задач, причём были студенты, составившие по 1, 2 и 3 задачи. Тогда наибольшее кол-во студентов, составивших 4 ~~зад~~ задачи равно 7. Но тогда задач было составлено $4\cdot7+1+2+3 = 28+1+2+3 = 34$. А их 35. Противоречие +

4) База: для $n=2$, $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2\cdot2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{4}{12}+\frac{3}{12} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$

Переход: Верно: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

Для $n+1$: $\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} = \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2}+\frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{1}{2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. +

Х. 8) По условию, стрелок сделал хотя бы 12 выстрелов. Если он сделал хотя бы 13 выстрелов, то тогда он выбил хотя бы 104 очка. Значит, он сделал ровно 12 выстрелов. Наименьшее кол-во очков, выбитое 12 выстрелами равно $10\cdot 8+9+10 = 80+9+10=99$. Исключаем вариант, когда было 10 выстрелов по 8 и 2 выстрела по 10 (~~нет~~ не было выстрела 9). Остаётся один вариант — 9 выстрелов по 8, ~~10 выстрелов по 2~~, 2 выстрела по 9 и один выст... по 10.

+

7) Пусть Али-Баба унесёт x кг. золота и y кг. алмазов, и получит $20\cdot x+60y$ динаров, при этом $x+y\le 100$. Золото будет занимать $\frac{x}{200}$ сундука и $\frac{y}{40}$ будут занимать алмазы

$\frac{x}{200}+\frac{y}{40}=1$, $x+5y=200$.

$x=200-5y=5(40-y)$.

Али-Баба получит $20\cdot 5(40-y)+60y=4000-100y+60y=40...$ динаров.

$x+y\le 100$, $200-5y+y\le 100$.

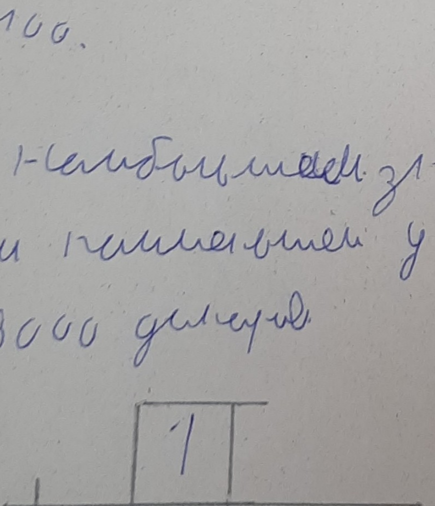
$-4y\le -100$.

$y\ge 25$.

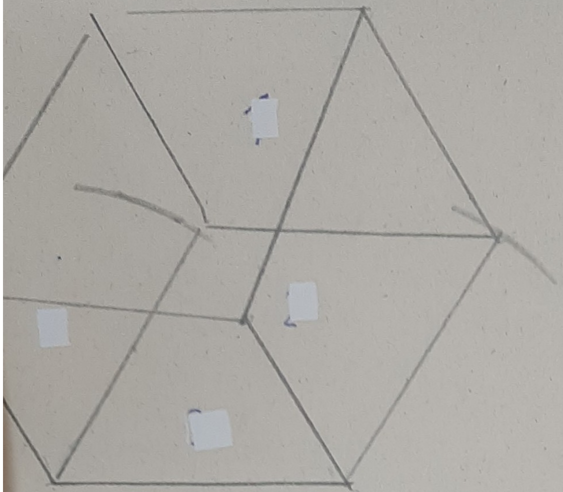
~~.....~~ Наибольшее значение выражения $4000-4...$ будет при наименьшем $y=25$. $4000-40\cdot 25=4000-100...$

Ответ: 3000 динаров.

1)



Грань 1 может быть цвета в любой из 6 цве... Грань 2 может в любой ... Грань 6 может в ... из 6.



Если кубик стоит на углу (который раскрашен) с номером 4. (эти углы внизу), то его можно повернуть 4 способами. И может принимать значения от 1 до 6.

Всего можно изготовить ~~кубиков~~ $\frac{6^6}{6\cdot 4} = \frac{6^5}{4} = 6^3 3^2 = 1944$ кубика

+

5) Пусть у нас 3 девушки и трое юношей.
Обозначим девушек через A, B, C, юношей: 1, 2, 3
красивые (по возрастанию) A → B → C.
умные (по возрастанию) B → C → A
В первом танце: A − 1, B − 2, C − 3.
Во втором танце: A − 3, B − 1, C − 2
~~1 танцу~~ 1 танцует ~~с более~~ с более красивой,
2 танцует одновременно с более красивой и умной
3 танцует с более умной.

+

Ответ: мог.